

用差分法计算二维磁场

许永兴

(中国科学院近代物理研究所)

随着加速器事业及电机电器工业的发展,电磁铁的磁场分布形态越来越受到人们的关心。近年来,随着大型电子计算机的问世,就有可能用计算方法求解磁场。作为二阶椭圆型偏微分方程其解法可分为两大类,有限元素法及差分法。采用三角形单元的有限元素法^[1,2]能适应边界及二种介质交界面的复杂的几何形状。由于这种特定的灵活性使得它在磁场计算中受到广泛重视。矩形网格的差分法不需要产生不均匀的三角形网格,因而上机前准备工作较小。并也不象有限元素法那样在迭代过程中要化相当长时间来重新计算方程的系数矩阵。这样,这种方法简洁、紧凑,减少了计算时间。因而它仍不失为磁场计算的一种好方法。国际上有些通用程序如 NUTCRACKER^[3]、GRACY^[4]等就是用差分方法求解磁场的。

本文从泛函求极值的变分问题出发导出自然满足反对称面条件的差分格式,最后用非线性超松弛方法求解方程组,从而得到磁场分布。

一、差分格式的导出

由 Maxwell 方程出发,引进矢量磁位 $\vec{A}$ 则可得相应的微分方程

$$\nabla \cdot (\gamma \mathbf{A}) = -J \quad (1)$$

式中, γ 为磁阻系数, J 为电流密度。与方程(1)及一定边界条件相对应的变分问题^[2]为:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} [g(|\nabla \mathbf{A}|^2) - 2JA] dXdy = \min \\ \Gamma_1, \Gamma_2: \mathbf{A} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中, Γ_1 是磁铁与空气相接触的边界, Γ_2 是对称面。 $g(|\nabla \mathbf{A}|^2)$ 是正比于磁能的, 它与 γ 关系为 $\gamma = dg/d(|\nabla \mathbf{A}|^2)$

对整个求解区域用变步长矩形网格离散, 其典型相邻网格如图 1 所示。此时泛函 T 可写成这样形式:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g(|\nabla \mathbf{A}|^2_{i,j}) h_i h_j - 2JA_{i,j} h_i h_j$$

式中, $|\nabla \mathbf{A}|^2_{i,j}$ 及 $A_{i,j}$ 是指中心为 $(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$

的矩形块的 $|\nabla \mathbf{A}|^2$ 及 A 。用差分代替微分, 则

$$|\nabla \mathbf{A}|^2_{i,j} = \frac{1}{2h_x^2} [(A_{i,j} - A_{i-1,j})^2 + (A_{i,j} - A_{i+1,j})^2] + \frac{1}{2h_y^2} [(A_{i,j} - A_{i,j-1})^2 + (A_{i,j} - A_{i,j+1})^2]$$

$$A_{i,j} = \frac{1}{4} (A_{i,j} + A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j-1})$$

为了使 $T = \min$, 应使每一个 i, j 节点(除第一类边界条件的节点外)

$$\partial T / \partial A_{i,j} = 0$$

这样对应的非线性方程为:

$$f_{i,j} = \frac{\partial T}{\partial A_{i,j}} = \frac{1}{2} (g'_{i,j} \left[\frac{h_y}{h_x} (A_{i,j} - A_{i-1,j}) + \frac{h_x}{h_y} (A_{i,j} - A_{i,j-1}) \right])$$

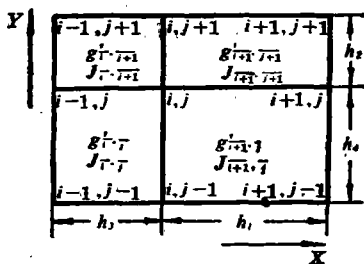


图 1 变分推导的网格图

$$\begin{aligned}
& +g'_{\bar{i},\bar{j}+1}\left[\frac{h_2}{h_3}(A_{i,j}-A_{i-1,j})+\frac{h_3}{h_2}(A_{i,j}-A_{i,j+1})\right] \\
& +g'_{\bar{i}+1,\bar{j}+1}\left[\frac{h_2}{h_1}(A_{i,j}-A_{i+1,j})+\frac{h_1}{h_2}(A_{i,j}-A_{i,j+1})\right] \\
& +g'_{\bar{i}+1,\bar{j}}\left[\frac{h_2}{h_1}(A_{i,j}-A_{i+1,j})+\frac{h_1}{h_4}(A_{i,j}-A_{i,j-1})\right] \\
& -\frac{1}{2}(J_{\bar{i}+1,\bar{j}}h_1h_4+J_{\bar{i},\bar{j}+1}h_2h_1+J_{\bar{i},\bar{j}+1}h_2h_3+J_{\bar{i},\bar{j}}h_3h_4)\}=0
\end{aligned} \quad (3)$$

$$i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$$

对 $m \times n$ 个方程联立即可求出每个节点上的 A 值。

若图1中 $(i-1,j)$, (i,j) , $(i+1,j)$ 三点所连成的线是满足 $\partial A/\partial n=0$ 的边界线, 并且上面二块网格在求解区域里。那末可由(3)式得:

$$\begin{aligned}
f_{i,j} = & \frac{1}{2}\left\{g'_{\bar{i},\bar{j}+1}\left[\frac{h_2}{h_3}(A_{i,j}-A_{i-1,j})+\frac{h_3}{h_2}(A_{i,j}-A_{i,j+1})\right] \right. \\
& +g'_{\bar{i}+1,\bar{j}+1}\left[\frac{h_2}{h_1}(A_{i,j}-A_{i+1,j})+\frac{h_1}{h_2}(A_{i,j}-A_{i,j+1})\right] \\
& \left. -\frac{1}{2}(J_{\bar{i}+1,\bar{j}+1}h_1h_4+J_{\bar{i},\bar{j}+1}h_2h_3)\right\}=0
\end{aligned} \quad (4)$$

式(4)体现了类似有限元法中的 $\frac{\partial A}{\partial n}=0$ 的边界条件是自动满足的。

当从微分方程(1)出发对 γ 作线性化处理, 用差分代替微分对图2所示的格网我们可得众所周知的差分表达式^[4]为:

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 \\
& -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) A_0 + I_0 = 0
\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } \alpha_1 &= \frac{\gamma_1 h_4 + \gamma_2 h_2}{2h_1} & \alpha_2 &= \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma_3 h_3}{2h_2} \\
\alpha_3 &= \frac{\gamma_3 h_2 + \gamma_4 h_4}{2h_3} & \alpha_4 &= \frac{\gamma_4 h_3 + \gamma_1 h_1}{2h_4}
\end{aligned}$$

$$I_0 = 1/4 (J_1 h_1 h_4 + J_2 h_1 h_2 + J_3 h_2 h_3 + J_4 h_3 h_4)$$

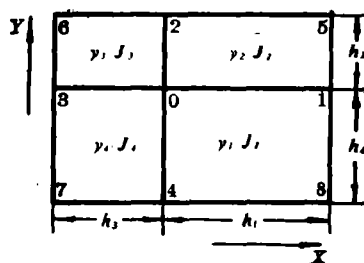


图2 微分推导的网格图

经过简化及归结后不难看出(3)与(5)式是对等的。但(3)式较之(5)式有以下几个优点: 1. (3)式是由能量积分处于极值的公式推导得到的, 因而它具有更深刻的物理意义。2. (3)式的推导中对 $\gamma=dg/d(|\nabla A|)$ 没有作线性化假设, 因而更准确地反映了原微分方程。这样就可利用非线性超松弛迭代法这样一些方法来解非线性方程组。3. (3)式是由变分问题出发的, $\frac{\partial A}{\partial n}$ 的边界条件是能自动满足的。但用(5)式时, 处理 $\frac{\partial A}{\partial n}=0$ 边界条件时必须另虚设一层边界外的网格^[5]来人为地创造 $\frac{\partial A}{\partial n}=0$ 的条件, 这样手续繁杂, 并使计算格式不统一。

二、非线性方程组的解

磁场计算中最后归结出来的是高阶非线性方程组。解这方程组在计算中往往是极为费时间的。选择合适的方法加快收敛是计算中一个重要问题。

1. Newton-Raphson方法 设有一非线性方程组

$$f_j(X)=0 \quad (j=1,\dots,n)$$

$$\text{令 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

其中, $e_i = x_i^{(K+1)} - x_i^{(K)}$

对函数 f_i 进行 Taylor 级数展开

$$f_i(X^{(K+1)}) = f_i(X^{(K)}) + \sum_j e_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + 0(e^2) = 0$$

引入 $n \times n$ 矩阵 F 其元素为:

$$F_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$$

忽略二次项, 则

$$e = -F^{-1}f$$

即

$$X^{(K+1)} = X^{(K)} - F^{-1}f \quad (6)$$

公式(6)是基本 Newton-Raphson 方法一般表示式。这种方法一般说来收敛是较快的。但有以下几个主要困难: 1) 对每个迭代中间值 $X^{(K)}$ 必须计算矩阵 F 的元素。2) 公式(6)涉及 F 矩阵的逆阵运算, 它的计算量是与 n^3 成正比。随着 n 的增大它是很费时间的。3) 实际运算经验表明在迭代过程中往往是不稳定的。因而, 有时采用改进型牛顿法:

$$X^{(K+1)} = X^{(K)} + \lambda F^{-1}f$$

λ 是用单向探索技术而选取的因子。但这样导致原来就烦琐的计算步骤更加复杂。

2. 线性化超松弛迭代法 设有非线性方程组

$$\sum_j C_{ij} A_{ij} = P_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则

$$A_{ii} = \frac{P_i - \sum_j^* C_{ij} A_{ij}}{C_{ii}}$$

这里令

$$\sum_j^* C_{ij} A_{ij} = \sum_j C_{ij} A_{ij} - C_{ii} A_{ii}$$

$$A_{ii}^{(K+1)} = A_{ii}^{(K)} + \omega \left(\frac{P_i - \sum_j^* C_{ij} A_{ij}^{(K, K+1)}}{C_{ii}} - A_{ii}^{(K)} \right) \quad (7)$$

式中, ω 是为加速收敛而采用的超松弛因子, 为大于 1 的数。它可用某些方法^[1]合适地选取。为避免或减小非线性方程组解时的振荡现象, 有必要对方程的系数进行低松弛。

$$C_{ij}^{(K+1)} = \rho C_{ij}^{new} + (1-\rho) C_{ij}^{(K)}$$

这里 ρ 是一个小于 1 的正数, 可在计算中试验选取。

当所求解的问题非线性不严重时, 这种方法还是比较有效的。但一般说来收敛较慢。但当求解的问题非线性严重时, 例如磁铁中磁感应强度很高, 铁中大部分区域进入磁铁材料的非线性区域, 求解时往往发生振荡现象。

3. 非线性超松弛迭代法 它是在 Newton-Raphson 方法基础上, 忽略非对角线项而推导出来的。它较之 Newton-Raphson 方法计算程式简单, 每次迭代时间短。据报导^[6]它收敛也是较快的。

对应于方程(3)的非线性超松弛迭代法基本公式为:

$$A_{i,j}^{(K+1)} = A_{i,j}^{(K)} - \omega \frac{f_{ij}(A_{11}^{(K+1)}, \dots, A_{i-1,j}^{(K+1)}, A_{i,j}^{(K)}, \dots, A_{m,n}^{(K)})}{\frac{\partial f_{ij}}{\partial A_{i,j}}(A_{11}^{(K+1)}, \dots, A_{i-1,j}^{(K+1)}, A_{i,j}^{(K)}, \dots, A_{m,n}^{(K)})} \quad (8)$$

其中 ω 为超松弛因子。

三、计算结果

我们对如图 3 所示的用 DT-3 材料制作的准窗框型弯曲磁铁用差分法进行了计算。非线性方程组采用非线性超松弛迭代法解。由于磁铁的对称性仅计算了磁铁的 1/4 区域。

计算采用的是步长 $h=5\text{mm}$ 的等间隔的矩形格网。磁铁空气隙中场的分布示于图 4。与实验测量值相比, 其绝对值平均误差为 1.8%, 相对值平均误差为 0.2%。计算是在 DJS-108 机上进行, 迭代误差

$$e = \sqrt{\frac{\sum_i \Delta A_i^2}{\sum_i A_i^2}}$$

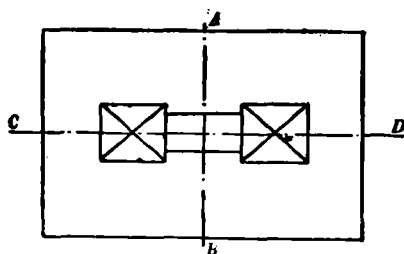


图3 准窗框型弯曲磁铁的剖面图

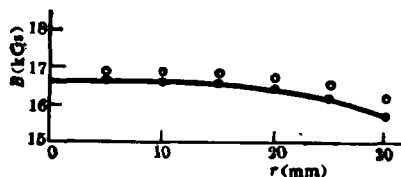


图4 磁中心面上磁场分布曲线

●——实验值 ○——计算值

达到 10^{-8} 数量级时认为收敛了。

参 考 文 献

- [1] A. M. Winslow, Proc. int. conf. magnet technol., 1965, p.170.
- [2] 许永兴和马英杰, 1979年全国加速器技术交流会论文选集, p. 377.
- [3] J. S. Colonias, Particle accelerator design: computer programs, Academic Press, 1974.
- [4] 许永兴, 用差分法计算偏转磁铁二维场, 中国科学院近代物理所资料, 7611-F11-11.
- [5] S. V. Ahamed and E. A. Erdelyi, IEEE Trans. Power Apparatus & Systems PAS-85, 61 (1966).
- [6] P. Concus, Proc. int. conf. magnet technol., 1965, P.164.

(1980年7月5日收到)

简讯

第二届全国辐射研究学术交流会在苏州市举行

中国核学会辐射研究与辐射工艺学会第二届全国辐射研究学术交流会于1982年10月30日至11月3日在苏州举行。参加这次学术会议的有来自全国五十一个单位的204名代表。

会议共收到论文233篇, 涉及辐射生物学、辐射医学基础、辐射化学、辐射物理和辐射农业等五大方面, 共十余个专业。大会报告有小剂量电离辐射对人的影响、肿瘤放射生物学的进展、DNA辐射物理与化学的新进展、染色质辐射生化的进展、辐射和其它因素体外诱发细胞转化研究概况、中子生物效应研究的概况、利用病毒变体探讨哺乳动物细胞的诱导性致突过程及相关的DNA修复、电离辐射与造血干细胞以及活性氧在放射生物学中的作用等综述报告。这些报告评述了国内外研究的概况, 对与会者开阔眼界、扩大思路起了良好作用。

研究工作论文以分组报告和科学墙报两种形式进行交流。这些论文普遍注意了应用基础研究, 各学科间的相互渗透, 就研究的深度和广度而言, 比上一届会议有了一定的进步。有的研究工作已达到或接近国内外先进水平, 这是十分令人鼓舞的。会议期间还召开了辐射致敏剂、食品辐照、染色体畸变和微核等专题讨论会。整个会议学术空气浓厚, 交流不拘形式, 生动, 活跃。

会议希望全体与会同志, 以赵总理在全国发明奖励大会上的重要报告, 作为我们今后工作的指导方针。面向经济建设, 研究有重大经济效益的关键科学技术课题, 在提高经济和社会效益方面作出贡献。

(盛 棕)

than that of the latter; (3) Beyond polypeptide hormones, radioiodination of LPO were studied. With practical amount of LPO, the iodination of LPO was trifle.

Low background automatic scintillation counter

Pan Haochang Wei Shijun

(Shanghai Institute of Nuclear Research, Academia Sinica)

Zheng Yuyuan

(East China Normal University)

A low background automatic scintillation counter YSJ-SH79 was developed. In this instrument we adopted the technology of optical crosstalk discrimination and the four layer shield combined by lead, silver, copper and perspex. The samples are fed from underneath and samples can be automatically measured in turn. The quality reached by the instrument for ^{14}C is as follows: the background is 2.222 cpm the detection efficiency is 78% and the figure of merit is 2738.

Eliminating the irradiation effects in BF_3 counter by high voltage modulating

Zhou Chunmei Chen Miaosun Yu Panshui Hong Runsheng

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

In this paper, we have briefly described the method, the electronics circuit and the performance test of eliminating the irradiation effects in BF_3 counter by high voltage modulating.

The calibration of an emittance-meter

Yan Shengqing Shen Dingyu Zhao Weijiang Fu Huiqing Chen Jiaer

(Beijing University)

The procedure of emittance measurement in 2 dimensional phase space is described, and related formulas for different conditions are given. Considering various sources of errors the emittance-meter is then calibrated by means of setting standard acceptance and the results are presented.

Calculation of two-dimensional magnetic field by finite-difference method

Xu Yongxing

(The Institute of Modern Physics, Academia Sinica)

The magnetic vector potential A is used for calculation of two-dimensional magnetic field. The difference equations with irregular rectangular meshes are deduced from variational

derivation, with the formula satisfying the boundary condition $\partial A/\partial n=0$ derived naturally. Finally the simultaneous non-linear equations are solved by non-linear successive overrelaxation method. The results of calculation are rather well for the example magnet.

The compare of plane head quadrupole of permanent magnetic multi-piece ring structure with ordinary electromagnetic lens

Liu Maosan Chen Renhuai Wu Wentai Li Shuzhen Liu Yucheng Shi Caitu
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

According to the principle of "Uniform magnetization" the 2-dimensional space expression for the constant direction magnetized multi-piece ring structure with plane head is given by the method of harmonic analysis. The imaginary project of 16-piece plane head quadrupole is computed, and comparison has been made with selected ordinary electromagnetic lens system.

A capacitive coupling of dee's circuit in the cyclotron

High Frequency Group of Cyclotron
(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

In order to expand the frequency range and save the time needed for energy variation, the inductive coupling has been changed into capacitive. The coupling system now can be adjusted in a wide.

The spatial distribution of bremsstrahlung in a target chamber of J-2 Van de Graaff electron accelerator

Chen Jingzhong Mu Changrong Xie Junfang
(*Institute of Industrial Hygiene, Sichuan Province*)
Yang Shiji Lei Qingzhang Xia Xingyuan Peng Shulan
Sun Shaokuan Liu Xiaohua
(*720 Institute, Sichuan University*)

In this paper the measurement of angular distribution of the bremsstrahlung in the target chamber of J-2 Van de Graaff electron accelerator is presented. X method for evaluating the exposure rate of bremsstrahlung in the target chamber was obtained in connection with the measurement. The exposure rate was thus employed in radiation protection of surroundings.